CALCOLO DELLE VARIAZIONI : PROBLEMI DI MINIMO VINCOLATI 31/3/2010

Cominciamo ad considerare un tipo di vincolo puntuale:

$$x^*(\cdot) = \arg\min_x \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau \qquad \text{s.t.} \quad x(t_0) = x_0 \,, \quad f(x(t), t) = 0$$

dove la funzione $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^p$ vincola istante per istante il valore di $x(t)$. Tipicamente per non ricadere in situazioni degeneri si assume $p < n$.

Procedendo esattamente come nel caso non vincolato:

$$\delta J(x, \delta x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)\, \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\right] dx(\tau)$$

Per questa trattazione, trascuriamo momentaneamente i termini delle condizioni al contorno (in questo caso $x(t_0) = x_0$ e $x(t_f)$ libero) e concentriamoci sul solo termine integrale:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x}(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\right]^T \delta x(\tau)\right\} d\tau \qquad (1)$$

Il vincolo, obbliga le variazioni $\delta x(\tau)$ ad essere non arbitrarie in quanto solo le variazioni che preservano il vincolo $f(x(\tau), \tau) = 0$ sono ammissibili.

In pratica dobbiamo avere:

$$f(x(\tau) + \delta x(\tau), \tau) = 0 \qquad \forall \delta x(\tau)$$

che sviluppato in serie di Taylor:

$$f(x(\tau) + \delta x(\tau), \tau) \cong f(x(\tau), \tau) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \delta x(\tau) + o(\|\delta x(\tau)\|^2) = 0$$

e supponendo che $x(\tau)$ soddisfi il vincolo abbiamo che:

$$f(x(\tau) + \delta x(\tau), \tau) = 0 \quad \Leftarrow\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x(\tau) = 0$$

cioè la (1) per variazioni che preservano il vincolo diventa:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau)\right]^T \delta x(\tau)\right\} d\tau = 0 \qquad \forall \delta x(\tau) : \frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x(\tau) = 0$$

Fatto: Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ed un vettore $y \in \mathbb{R}^n$, se:

$$y^T x = 0 \qquad \forall x : Ax = 0$$

allora $y \in \mathrm{Im}(A^T)$ cioè:

$$\exists p \in \mathbb{R}^p : \quad A^T p = y$$

Dim: Ricordiamo innanzitutto che:

$$\left[\ker(A)\right]^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T)$$

dove:

$$\ker(A) = \{ v : Av = 0 \}, \qquad \mathrm{Im}(A) = \{ w : \exists v \text{ t.c. } Av = w \}$$

$$y^T x = 0 \qquad \forall x : Ax = 0$$

equivale a:

$$y^T x = 0 \qquad \forall x \in \ker(A)$$

o alternativamente:

$$y \in [\ker(A)]^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T)$$

∎

Utilizzando quanto appena dimostrato, abbiamo che la condizione:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau) \right]^T \delta x(\tau) \right\} d\tau = 0 \quad \forall \delta x(\tau) : \frac{\partial f}{\partial x}\delta x(\tau) = 0$$

implica l'esistenza di una funzione $p^*(t)$ tale che:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), t)\, p^*(t) = 0$$

o equivalentemente definendo la funzione aumentata:

$$L_a(x(t), \dot{x}(t), p(t), t) = L(x(t), \dot{x}(t), t) + p^T(t) f(x(t), t)$$

abbiamo che se $x^*(\cdot)$ è un estremo per il funzionale vincolato allora:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p(t), t) \right] = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

Più in generale è possibile estendere il risultato a vincoli del tipo

$$f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

In particolare abbiamo che se la traiettoria $x^*(\cdot)$ è un estremo per il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_{x} \int_{t_0}^{t_f} L(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau)\, d\tau \qquad \text{s.t.} \quad f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

allora $\exists p^*(t)$: $$\frac{\partial L_a}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), p^*(t), t) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_f]$$

avendo definito:

$$L_a(x(t), \dot{x}(t), p(t), t) = L(x(t), \dot{x}(t), t) + p^T(t) f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

o

CONTROLLO OTTIMO

$$\min_{u} \; h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \end{cases}$$

Rispetto ai problemi visti nel calcolo delle variazioni, abbiamo un termine $h(x(t_f), t_f)$ che però possiamo riscrivere:

$$h(x(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[h(x(\tau), \tau)\right] d\tau + \underbrace{h(x(t_0), t_0)}_{\text{costante}}$$

per cui possiamo ricondurci a:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(\tau), u(\tau), \tau) + \frac{d}{dt}\left[h(x(\tau), \tau)\right] \right\} d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(\tau), u(\tau), \tau) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(\tau), \tau)\right]^T \dot{x}(\tau) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(\tau), \tau) \right\} d\tau$$

Exploiting what we saw in the previous section:

$$L_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t)\right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) + p^T(t)\left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x}\right.$$

cioè abbiamo costruito la funzione costo aumentata introducendo il moltiplicatore di Lagrange con costo associato $p^T(t)\left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\right]$

Scriviamo ora le condizioni necessarie per l'ottimo $x^*(\cdot), u^*(t)$ facendo attenzione al fatto che la variabile di ottimizzazione non è più solo $x(\cdot)$ ma anche $u(\cdot)$:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p^*(t),t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p^*(t),t) = 0$$

$$\frac{\partial L_a}{\partial u}(x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p^*(t),t) - \cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),u(t),p(t),t)} = 0$$

$$\frac{\partial L_a}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t),u(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial h}{\partial x}(x(t),t)\,\dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t),t)\right\} + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t),t)\right]^T p(t)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}(x(t),u(t),t) + \underline{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x(t),t)\,\dot{x}(t)} + \underline{\underline{\frac{\partial h}{\partial t\,\partial x}(x(t),t)}} + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t),t)\right]^T p(t)$$

$$\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t),t) - p(t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial x}(x(t),t) - \dot{p}(t)$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x(t),t)\,\dot{x}(t)} + \underline{\underline{\frac{\partial h}{\partial x\,\partial t}(x(t),t)}} - \dot{p}(t)$$

Per cui è facile vedere che:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t),u(t),t) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t),t)\right]^T p(t) - \dot{p}(t)$$

che valutata nella soluzione $x^*(\cdot)$, $u^*(\cdot)$, $p^*(\cdot)$ porta a:

$$\dot{p}^*(t) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),t)\right] p^*(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),u^*(t),t) \qquad (2)$$

in quanto:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p^*(t),t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_a}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),u^*(t),p^*(t),t) = 0$$

In modo del tutto analogo:

$$\frac{\partial L_a}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}\left(x(t), u(t), t\right) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t), t)\right]^T p(t)$$

che deve essere identicamente nullo valutato in $x^*(\cdot), u^*(\cdot), p^*(\cdot)$:

$$\frac{\partial g}{\partial u}\left(x^*(t), u^*(t), t\right) + \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t), t)\right]^T p(t) = 0 \qquad (3)$$

Definendo poi, l'Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p^T(t)\left[f(x(t), u(t), t)\right]$$

e ricordando che in ogni caso deve essere soddisfatto il vincolo:

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t) \quad , \quad x^*(t_0) = x_0 \, , \; x^*(t_f) = x_f \qquad (4)$$

possiamo riscrivere (4), (3) e (2) come segue:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\left(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\right) \quad , \quad x^*(t_0) = x_0 \, , \; x^*(t_f) = x_f \\ \dot{p}^*(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\left(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\right) \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\left(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\right) \end{cases}$$

che sono le condizioni necessarie per un problema di ottimo con stato finale e stato iniziale vincolati. Si può poi dimostrare che se lo stato finale ed il tempo non sono fissi, allora deve valere la seguente:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f)\right]^T \delta x_f + \left[\mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f)\right]\delta t_f = 0$$

per ogni variazione ammissibile δx_f, δt_f. Se ad esempio $x(t_f)$ è libero ma t_f è fissato ($\delta t_f = 0$) allora la condizione da soddisfare è:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) = 0$$

Esempio: controllo ottimo con stato finale libero e tempo fisso

$$\min_{u} \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau + h(x(t_f), t_f)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m;$$

Condizioni necessarie:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & n\text{- equazioni} \\ \dot{p}^*(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & n\text{- equazioni} \\ 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) & m\text{- equazioni} \end{cases}$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$x^*(t_0) = x_0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) = p^*(t_f).$$

Tipicamente è possibile risolvere il sistema di equazioni risolvendo la terza equazione in funzione di u:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x^*(t), p^*(t), t)$$

e successivamente risolvendo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), u^*(x^*_t, p^*_t), p^*(t), t) & n\text{- equazioni} \\ \dot{p}^*(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(x^*(t), p^*(t), t)\, p^*(t), t) & n\text{- equazioni} \end{cases}$$

a partire dalle condizioni al contorno:

$$x^*(t_0) = x_0 , \quad p^*(t_f) = +\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \qquad 2n\text{-condizioni al contorno}$$

Esempio: controllo ottimo con stato finale vincolato

$$\min_u \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau + h(x(t_f), t_f)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m;$$

Procedendo esattamente come in precedenza ci si trova a risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), \overset{u^*(x^*, p^*),}{\vee}\, p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\left(x^*(t), u^*(x^*(t), p^*(t)), p^*(t), t\right) \end{cases}$$

con le seguenti $2n$ condizioni al contorno:

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f$$

■

CONTROLLO LQ

$$\min_u \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) + u^T(\tau) R(\tau) u(\tau)\right] d\tau$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $Q_f = Q_f^T \geq 0, \quad Q(t) = Q^T(t) \geq 0, \quad R(t) = R^T(t) > 0 \quad \forall t.$

Chiaramente abbiamo:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + p^T(t) A(t) x(t) + p^T(t) B(t) u(t)$$

Imponendo:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0$$

otteniamo:

$$R(t) u^*(t) + B^T(t) p^*(t) = 0$$

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) p^*(t)$$

Le altre condizioni sono date da:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = A(t)\, x^*(t) + B(t)\, u^*(t) \\ \dot{p}^*(t) = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = -Q(t)\, x^*(t) - A^T(t)\, p^*(t) \end{cases}$$

con condizioni al contorno:

$$x(t_0) = x_0 , \quad p^*(t_f) = Q_f\, x^*(t_f)$$

Sostituendo il valore di u^*:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = A(t) - B(t)\, R^{-1}(t)\, B^T(t)\, p^*(t) \\ \dot{p}^*(t) = -Q(t)\, x^*(t) - A^T(t)\, p^*(t) \end{cases} \qquad x^*(t_0) = x_0 , \quad p^*(t_f) = Q_f\, x^*(t_f)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{p}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)\, R^{-1}(t)\, B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ p^*(t) \end{bmatrix} \\ \\ x^*(t_0) = x_0 , \quad p^*(t_f) = Q_f\, x^*(t_f) \end{cases}$$

Kalman ha dimostrato che la soluzione di questo sistema lineare dinamico è data da:

$$p^*(t) = K(t)\, x^*(t)$$

che derivata porta a:

$$\dot{p}^*(t) = \dot{K}(t)\, x^*(t) + K(t)\left(A(t) - B(t)\, R^{-1}(t)\, B^T(t)\, K(t) \right) x^*(t)$$

e confrontato con $\dot{p}^* = -Q x^* - A^T p^* = -\left(Q + A^T K\right) x^*$ porta a:

$$-\left(Q(t) + A^T(t) K(t)\right) x^* = \left(\dot{K}(t) + K(t) A(t) - K(t)\, B(t)\, R^{-1}(t)\, B^T(t)\, K(t) \right) x^*(t)$$

soddisfatto $\forall x^*$ se:

$$\dot{K}(t) = -K(t)\, A(t) - A^T(t)\, K(t) + K(t)\, B(t)\, R^{-1}(t)\, B^T(t)\, K(t) - Q(t)$$

che deve essere integrata dalla condizione iniziale

$$K(t_f) = Q_f .$$