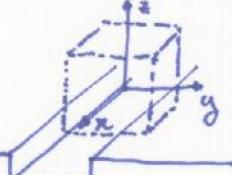


In ogni task è possibile individuare due differenti insiemi di direzioni:

- (1) direzioni in cui il moto dell'end-effector è libero
- (2) direzioni lungo cui l'ambiente esercita forze/coppe vincolari.

- Questo set di direzioni devono complessivamente coprire tutto lo spazio cartesiano, ovia lo spazio definito dalle 3 posizioni e dai tre orientamenti. In altre parole, se (1) è formato da  $k$  direzioni allora (2) è formato da  $6-k$  direzioni.
- Inoltre, i due set (1) + (2) devono essere complementari, ossia devono coprire tutto lo spazio cartesiano.
- Le specifiche di controllo saranno:
  - $k$  velocità lungo le direzioni ammissibili di moto.
  - $6-k$  forze lungo le direzioni delle forze/coppe vincolari.

Esempio: cubo lungo un binario



Riferiamo le direzioni (1) e (2) ad un sistema di riferimento come quello indicato in figura:

- (1) direzioni in cui il moto dell'end effector è libero:

- velocità lineare lungo l'asse  $x \Rightarrow v_x$  arbitraria
  - velocità angolare lungo l'asse  $y \Rightarrow w_y$  arbitraria
- }  $\Rightarrow k=2$

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_y \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

(2) direzioni lungo cui l'ambiente esercita forze/copie vincolari:

- forze laterali del binario:  $F_y \neq 0$
- forze verticali del binario:  $F_z \neq 0$
- coppe laterali del binario:  $\mu_x \neq 0$
- coppe verticali del binario:  $\mu_z \neq 0$

$$4 = 6 - k$$

$$h = \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \\ \mu_x \\ 0 \\ \mu_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix}$$

Si noti che le direzioni di spostamento ammissibili sono ortogonali alle direzioni delle forze vincolari, cioè:

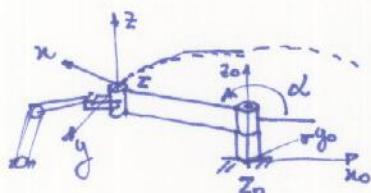
$$[v^T \ w^T] h = 0 \quad \forall v, w, h$$

in quanto abbiamo:

$$[v \ w] = T \begin{bmatrix} v_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad h = Y \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix} \Rightarrow [v^T \ w^T] h = [v_x \ w_y] T^T Y \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \\ \mu_x \\ \mu_z \end{bmatrix}$$

dove è facile verificare che  $T^T Y = 0$ . Questo risultato vale in generale e deriva dal fatto che le reazioni vincolari non possono compiere lavoro.

Esempio: manovella in rotazione



La trasformazione da  $Z_0$  a  $Z$  è una rototraslazione. Come vedremo è di interessare la sola parte di rotazione che corrisponde ad una pura azione di  $\alpha$  lungo  $z$ :

$$Z_0 \xrightarrow{T, R_z(\alpha)} Z$$

(1) direzioni in cui il moto dell'end-effector è libero:

- velocità lineare lungo l'asse  $y$ :  $v_y$
- velocità angolare lungo l'asse  $z$ :  $w_z$

$$\Rightarrow k=2$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

Ripetendo questo vincolo nel sistema di riferimento inerziale:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix}}_{T(\alpha)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

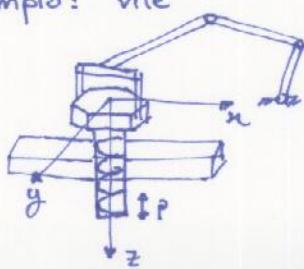
(2) direzioni su cui agiscono le reazioni vincolari:

- solo forze lineari lungo  $x$ :  $F_x$
  - forze lineari lungo  $z$ :  $F_z$
  - coppie lungo  $x$ :  $M_x$
  - coppie lungo  $y$ :  $M_y$
- $\left. \quad \right\} 4 = k - 6$

$$\begin{bmatrix} f \\ M \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = Y(\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso,  $T^T(\alpha)Y(\alpha) = 0$  come conferma del fatto che le reazioni vincolari non possono compiere lavoro. Si noti come in questo caso le forze/coppie vincolari e le direzioni ammissibili vivono in uno spazio che dipende da  $\alpha$ , ovia dal parametro che abbiamo utilizzato per parametrizzare il moto libero dell'end-effector.

Esempio: vite



$$\Delta z = \frac{P}{2\pi} \cdot \Delta \theta_z$$

(1) direzioni lungo cui il moto dell'end-effector è libero:

$$k=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{- la velocità verticale lineare } v_z \text{ e la velocità} \\ \text{angolare } \omega_z \text{ sono legate dalla seguente relazione:} \\ v_z = \frac{P}{2\pi} \omega_z \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2\eta/p \end{bmatrix} v_z = T v_z$$

(2) Invece di valutare le reazioni vincolari possiamo costruire  $Y$  tale che  $T^T Y = 0$ .

In questo modo però non esiste un'unica matrice  $Y$ . Alternativamente possiamo impostare che le reazioni vincolari <sup>faciano</sup> lavoro nullo:

$$[f^T \ \mu^T] \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [f_x \ f_y \ f_z \ \mu_x \ \mu_y \ \mu_z] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\eta/p \end{bmatrix} v_z = 0$$

Da cui non risultano vincoli su  $f_x, f_y, \mu_x$  e  $\mu_y$ . Resta:

$$f_z + \mu_z \frac{2\eta}{p} = 0 \Rightarrow f_z = -\mu_z \frac{2\eta}{p}$$

e pertanto:

$$\begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\eta/p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix}.$$

### CONTROLLO IBRIDO POSIZIONE/FORZA

Come al solito partiamo dalla descrizione della dinamica del manipolatore espresa in funzione delle coordinate generalizzate  $q \in \mathbb{R}^n$  che descrivono la posa del manipolatore. Inoltre ipotizziamo che agisca sull'end-effector una forza esterna  $h_{ext}$  dovuta all'ambiente esterno:

$$B(q) \ddot{q} + \underbrace{C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q)}_{\hat{n}(q, \dot{q})} = \tau - J^T(q) h_{ext}$$

In presenza di un contatto robot-ambiente, abbiamo visto che le velocità ammissibili per l'end-effector e le forze esterne ammissibili presentano la seguente struttura:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T(s) \dot{s}$$

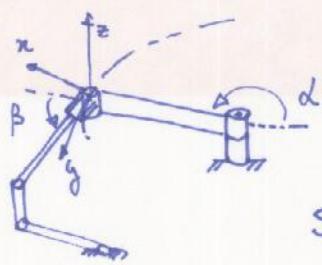
velocità ammissibili  
per l'end-effector

$$h_{ext} = \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = Y(s) \lambda$$

forze vincolari  
ammisibili

dove abbiamo indicato con  $s \in \mathbb{R}^{k}$  una parametrizzazione del moto libero dell'end-effector e con  $\lambda \in \mathbb{R}^{6-k}$  una parametrizzazione delle forze vincolari ammissibili. (13)

Esempio:



$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = T(s) \dot{s}$$

$$s = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}, \dot{s} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y/e \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y/e \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix}}_{T(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\dot{s}} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = T(s) \dot{s}$$

$$\begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_z^T(\alpha) & 0 \\ 0 & R_z^T(\alpha) \end{bmatrix}}_{Y(s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_z \\ \mu_x \\ \mu_y \\ \lambda \end{bmatrix} = Y(s) \lambda$$

~~~~~ o ~~~~~

Come già osservato facendo l'ipotesi che le forze ambientali non compiono lavoro avremo sempre verificata la seguente:

$$T(s)^T Y(s) = 0 \quad T(s) \in \mathbb{R}^{6 \times k}, \quad Y(s) \in \mathbb{R}^{6 \times (6-k)}$$

cioè le colonne di  $T(s)$  e le colonne di  $Y(s)$  formano le basi di due sottospazi de vettoriali di  $\mathbb{R}^6$  tra di loro mutuamente ortogonali: chiameremo sempre  $T(s)$  e  $Y(s)$  a range di colonna pieno per cui abbiamo che:

$$[T(s) \quad Y(s)] \text{ è una matrice invertibile}$$

È facile verificare che quest'ipotesi è verificata in tutti gli esempi proposti; è inoltre facile intuire che la proposta ipotesi deriva dalla natura stessa del problema considerato (direzioni di moto libero e direzioni di forze connie vincolari, (3) = (2), coprono complessivamente lo spazio cartesiano).

Riassumendo abbiamo pertanto:

$$\text{dinamico del manipolatore: } B(q)\ddot{q} + n(q,\dot{q}) = \tau - J^T(q) h_{ext}$$

$$\text{cinematico del manipolatore: } \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

$$\text{descrizione del contatto: } \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = T(s)\ddot{s} \quad s \in \mathbb{R}^k$$

$$h_{ext} = \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = Y(s)\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}^{6-k}$$

con le seguenti condizioni:

$$B(q) = B(q)^T > 0$$

$J(q)$  rango di riga pieno, i.e. configurazione non singolare

$$T^T(s) Y(s) = 0, \quad T(s) \perp Y(s) \quad \text{rango colonna pieno}$$

Le task che vogliamo compiere sono di imporre andamenti desiderati sia ai parametri di moto libero ( $s$ ) che alle forze di intarziazione ( $\lambda$ ).

$$s(t) \rightarrow s_d(t) \quad \lambda(t) \rightarrow \lambda_d(t)$$

Osserviamo che imponendo sia i vincoli della cinematica del manipolatore che la cinematica del contatto abbiamo:

$$J(q)\dot{q} = T(s)\ddot{s},$$

che derivata porta a:

$$J(q)\ddot{q} + J(q)\dot{\ddot{q}} = T(s)\ddot{\ddot{s}} + \dot{T}(s)\ddot{s}.$$

Sostituiamo ora:

$$\ddot{q} = B^{-1}(q) \left[ \tau - J^T(q)h_{ext} - n(q,\dot{q}) \right]$$

$$J(q)B^{-1}(q) \left[ \tau - J^T(q)h_{ext} - n(q, \dot{q}) \right] + \dot{J}(q)\dot{q} = T(s)\ddot{s} + \dot{T}(s)\dot{s}$$

Ricordando poi la descrizione delle forze di contatto  $h_{ext} = Y(s)\lambda$

$$J(q)B^{-1}(q) \left[ \tau - J^T(q)Y(s)\lambda - n(q, \dot{q}) \right] + \dot{J}(q)\dot{q} = T(s)\ddot{s} + \dot{T}(s)\dot{s}$$

Isolando i contributi relativi alle variabili che intendiamo controllare:

$$\begin{bmatrix} T(s) & J(q)B^{-1}(q)J^T(q)Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \lambda \end{bmatrix} = \dot{J}(q)B^{-1}(q)[\tau - n(q, \dot{q})] + \dot{J}(q)\dot{q} - \dot{T}(s)\dot{s}$$

ancora una volta è possibile individuare una suddivisione delle coppie  $\tau$ ; alcune coppie contribuiscono al task altre coppie invece agendo nello spazio nullo di  $J(q)B^{-1}(q)$  modificano la configurazione  $q$  del manipolatore senza contribuire a variazioni né di  $s$  né delle forze di vincolo  $\lambda$ .

$$\tau = J^T(q) \underbrace{\left( J(q)B^{-1}(q)J^T(q) \right)^{-1} J(q)B^{-1}(q)}_{h_{int}} \tau + \underbrace{\left( I - J^T(q)(J(q)B^{-1}(q)J^T(q))^{-1}J(q)B^{-1}(q) \right) \tau}_{\text{To : proiezione nello spazio nullo di } J(q)B^{-1}(q)}$$

$$\begin{bmatrix} T(s) & J(q)B^{-1}(q)J^T(q)Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \lambda \end{bmatrix} = (J(q)B^{-1}(q)J^T(q))h_{int} - J(q)B^{-1}(q)n(q, \dot{q}) + \dot{J}(q)\dot{q} - \dot{T}(s)\dot{s}$$

Costuiamo un nuovo ingranio in così fatto:

$$h_{int} = \hat{\mu} = (J(q)B^{-1}(q)J^T(q))^{-1}\hat{u} + J(q)B^{-1}(q)n(q, \dot{q}) - \dot{J}(q)\dot{q} + \dot{T}(s)\dot{s}$$

per cui abbiamo:

$$\begin{bmatrix} T(s) & J(q)B^{-1}(q)J^T(q)Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \lambda \end{bmatrix} = \hat{\mu} .$$

A questo punto osserviamo che la matrice:

$$\begin{bmatrix} T(s) & J(q)B^{-1}(q)J^T(q)Y(s) \end{bmatrix}$$

è invertibile nelle ipotesi fatte.

Per dimostrare che la matrice è invertibile, si osservi che la matrice  $J(q) B^{-1}(q) J^T(q)$  è simmetrica ed invertibile, per cui esiste una trasformazione ortogonale (anche ortonormale)  $U(q)$  che diagonalizza la matrice, i.e. :

$$J(q) B^{-1}(q) J^T(q) = U^T(q) D(q) U(q)$$

$$D(q) = \begin{bmatrix} \zeta_1(q) & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \zeta_n(q) \end{bmatrix}, \quad \zeta_i(q) > 0$$

Pertanto abbiamo :

$$\begin{aligned} [T(s) \quad J(q) B^{-1}(q) J^T(q) Y(s)] &= [T(s) \quad U^T(q) D(q) U(q) Y(s)] \\ &= [\underbrace{U^T(q) U(q) T(s)}_{\hat{T}(q)} \quad \underbrace{U^T(q) D(q) U(q) Y(s)}_{\hat{Y}(q)}] \end{aligned}$$

dove notiamo che  $\hat{T}(q)$  e  $\hat{Y}(q)$  preservano tutte le proprietà di  $T(s)$  e  $Y(s)$  ed in particolare  $\hat{T}^T(q) \hat{Y}(q) = 0$  e  $[\hat{T}(q) \quad \hat{Y}(q)]$  invertibile. A questo punto dobbiamo dimostrare l'invertibilità di:

$$[U^T(q) \hat{T}(q) \quad U^T(q) D(q) \hat{Y}(q)]$$

equivalente all'invertibilità di :

$$[\hat{T}(q) \quad D(q) \cdot \hat{Y}(q)]$$

la cui invertibilità deriva da quella di  $[\hat{T}(q) \quad \hat{Y}(q)]$  e dalla struttura di  $D(q)$  che è diagonale con elementi sulla diagonale tutti diversi da zero.

Sagliendo a questo punto:

$$\hat{u} = [T(s) \quad J(q) B^{-1}(q) J^T(q) Y(s)] u$$

Ottieniamo:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \lambda \end{bmatrix} = u = \begin{bmatrix} u_s \\ u_\lambda \end{bmatrix}$$

A questo punto, le strategie di controllo per  $s$  e  $\lambda$  potrebbero essere le seguenti:

$$u_s = \ddot{s}_d + K_d(\dot{s}_d - \dot{s}) + K_p(s_d - s)$$

da cui deriva:

$$(\ddot{s} - \ddot{s}_d) + K_d(\dot{s} - \dot{s}_d) + K_p(s - s_d) = 0$$

Per quel che riguarda le forze di contatto invece:

$$u_\lambda = \lambda_d + K_i \int (\lambda_d - \lambda) dt \quad \text{o più semplicemente } u_\lambda = \lambda_d$$

da cui deriva:

$$(\lambda - \lambda_d) + K_i \underbrace{\int (\lambda - \lambda_d) dt}_{\Rightarrow} = 0 \quad \text{o più semplicemente } \lambda = \lambda_d$$

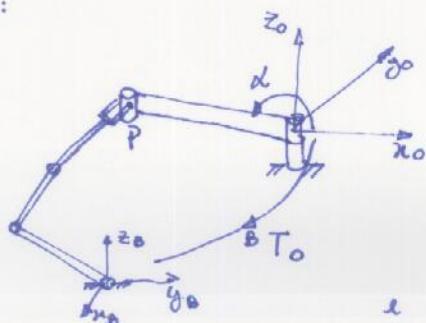
Si noti che l'implementazione della legge di controllo descritta, implica la misura delle variabili  $s$  (parametrizzazione movimenti ammissibili) e  $\lambda$  (forze coppiate vincolari).

La misura di  $s$  può essere ottenuta ugualando la posa dell'end-effector (funzione di  $q$ ) alle coordinate  $s$  in modo da ottenere  $s(q)$ .

La misura di  $\lambda$  può essere ottenuta a partire da una misura di  $h_{ext}$  (ottenuta ad esempio da una misura di forza/coppia con un sensore sull'end-effector) e dalla relazione  $h_{ext} = Y(s)\lambda$ . Ad esempio per una stima ai minimi quadrati:

$$\lambda = Y^+(s) h_{ext} \quad \text{pseudo-inverse di Moore-Penrose}$$

Esempio:



$$P^0 = \begin{bmatrix} l_{C_A} \\ l_{S_A} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p^0 = k(q)$$

$\uparrow$  cinematica relativa alla sola posizione cartesiana

$$P^B = {}^B T_0 \cdot P^0 \Rightarrow ({}^B T_0)^{-1} \cdot k(q) = \begin{bmatrix} l_{CAB} \\ l_{SAB} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e da questa relazione ricavo  $d(q)$ .