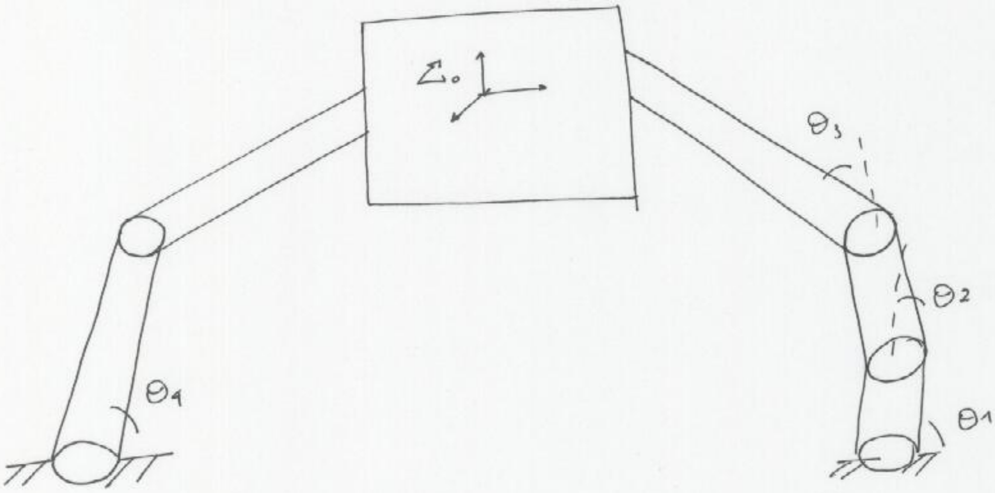
- CARATTERIZZARE LA DINAMICA del SISTEMA:




- PASSI che faremo:

(1) CARATTERIZZARE I PUNTI di CONTATTO $\longrightarrow$ $\bar{F}$ scambiate in quel punto

(2) CARATTERIZZARE I VINCOLI CINEMATICI

$$J_R \dot{\theta} = G^T \dot{x}$$

vincolo cinematico differenziale che lega la velocità ai giunti e la velocità dell'oggetto che stiamo manipolando

$G \longrightarrow$ Grasping matrix

(3) INSERIRE nella DINAMICA dei MANIPOLATORI VINCOLI CINEMATICI

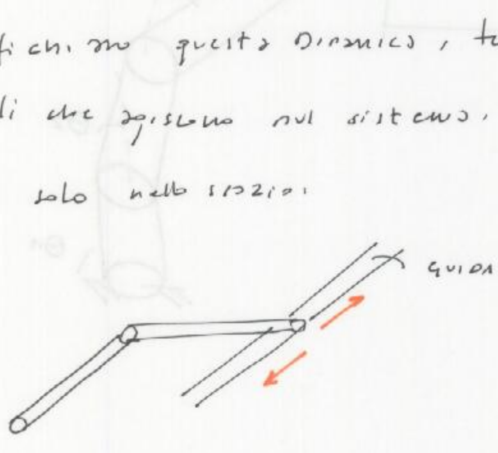
• SISTEMI DINAMICI VINCOLATI :

$$L(q,\dot q) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau + \tau_{ext}$$

q: coordinate generalizzate
τ: forze generalizzate

$$M(q)\ddot q + C(q,\dot q)\dot q + g(q) = \tau$$

⟶ modifichiamo questa Dinamica, tenendo conto che ci sono dei vincoli che agiscono sul sistema. Esempio: guida in cui ci possiamo muover solo nello spazio:




$h(q) = cost$ ⟶ Esempio di vincolo (che può essere la guida)

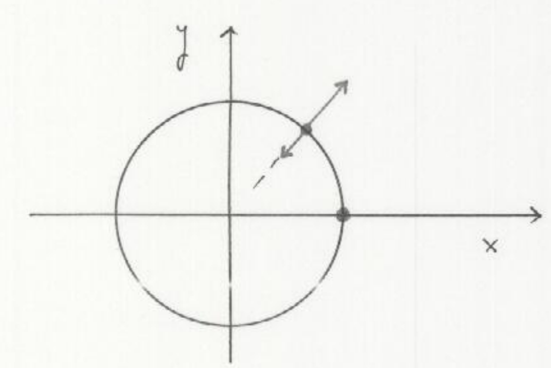
L'ambiente genera delle forze ⊥ alla superficie di VINCOLO:

$$\tau_{est} = \left[\frac{\partial h}{\partial q}\right]^T \cdot \lambda$$

$\lambda$ ⟶ opportune per preservare il vincolo

Esempio caso semplice: circonferenza

⟶ se mi trovo sulla circonferenza, le $\bar F$ di vincolo sono ⊥ per preservare il vincolo




$$h(x, y) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial q}\right]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

· LA POTENZA DOVUTA A QUESTE COPPIE E' NULLA:

$$\tau_{ext} \cdot \dot q = \tau_{ext}^T \dot q = \lambda^T \underbrace{\frac{\partial h}{\partial q} \cdot \dot q}_{\frac{d}{dt} h(q)} = 0 \longrightarrow$$ perché è l'AMBIENTE che le GENERA

$$h(q) = \text{cost} \ \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \ \frac{\partial h}{\partial q} \dot q = 0 \ , \quad A(q)\,\dot q = 0$$

$$\cancel{\Longleftarrow} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\bullet \ \tau_{ext} = A^T(q)\,\lambda$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}} + A^T(q)\lambda = \tau$$

$$M(q)\,\ddot q + \underbrace{C(q, \dot q)\,\dot q + g(q)}_{n(q,\dot q)} + A^T(q)\,\lambda = \tau \ \Longrightarrow \ \dot q = M^{-1}(q)\left(\tau - n(q,\dot q) - A^T \cdot \lambda\right)$$

$$A(q)\,\dot q = 0 \ \overset{}{\underset{d/dt}{\Longrightarrow}} \ A(q)\,\ddot q + \dot A(q)\,\dot q = 0$$

$$A(q)M^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot q) - A^T(q)\lambda\right] + \dot A \dot q = 0$$

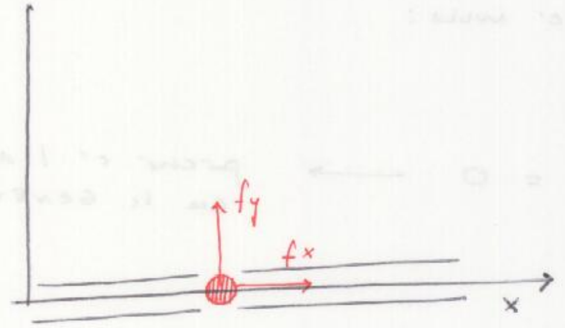
$$A(q)M^{-1}(q)A^T(q)\lambda = A(q)M^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot q)\right] + \dot A(q)\dot q$$

$$\lambda = \left[A(q)M^{-1}(q)A^T(q)\right]^{-1}\left\{A(q)M^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot q)\right] + \dot A(q)\dot q\right\}$$

sostituendo, otteniamo la DINAMICA del MANIPOLATORE VINCOLATO:

$$M(q)\ddot q + n(q,\dot q) + A^T(q)\left[A(q)M^{-1}(q)A^T(q)\right]^{-1}\left\{A(q)M^{-1}(q)\left[\tau - n(q,\dot q)\right] + \dot A\dot q\right\} = \tau$$

- ESEMPIO: massa puntiforme che si muove nel piano $xy$, vincolata su un binario sull'asse $x$




$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$$

$\cancel{x=0}$ $y = 0$

$\cancel{h(x) = x}$ $h(x,y) = y$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}}_{A(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \end{bmatrix}}_{\dot q} = 0$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

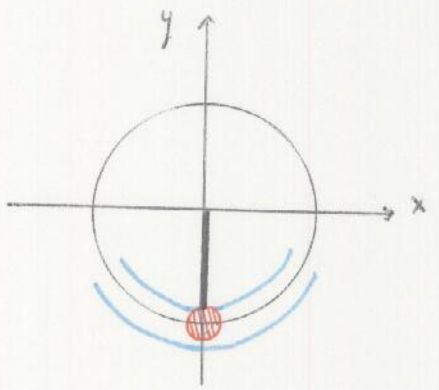
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}}_{\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix}} + \underbrace{A^T \lambda}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{m}}\right)^{-1} \frac{1}{\cancel{m}} f_y$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} &= f_x \\ m\ddot{y} + \cancel{f_y} &= \cancel{f_y} \end{aligned}$$

- ESEMPIO: massa puntiforme vincolata a stare su una circonferenza




$\longmapsto$ VIENE L' EQ. DI UN PENDOLO

$$c(x, y) = 0 \qquad x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix} + A^T(x,y)\lambda = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \cdot \lambda = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

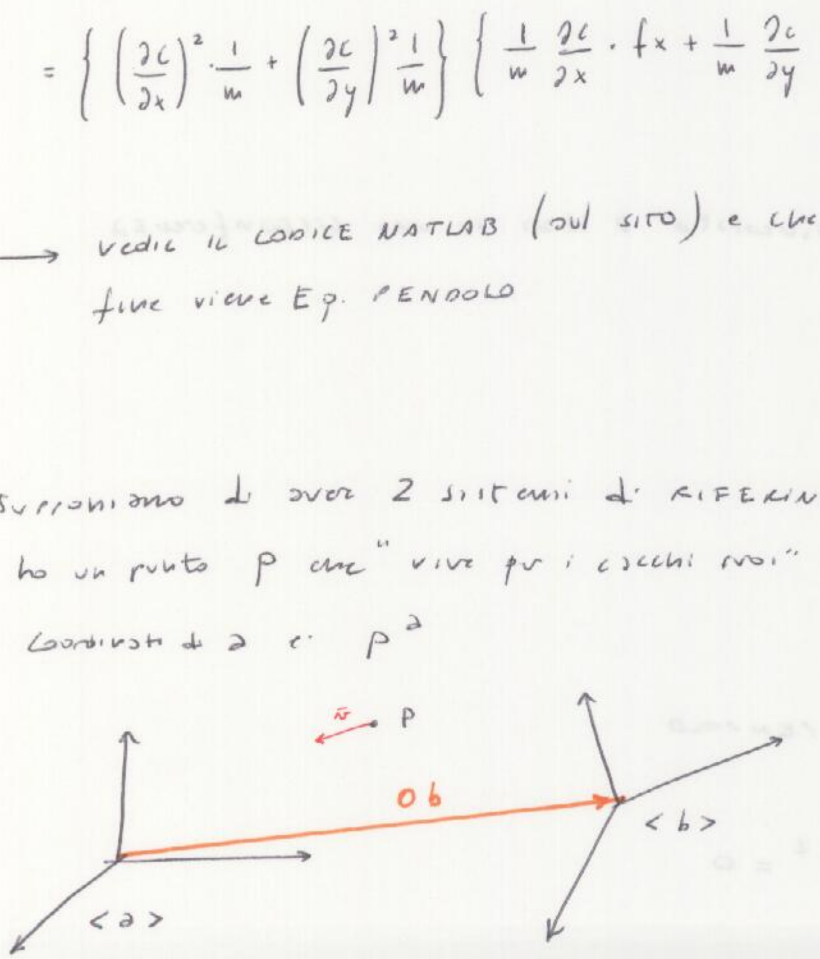
$$\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 2\dot{x} & 2\dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{1}{m} + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{m} \right\} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial c}{\partial x} \cdot f_x + \frac{1}{m} \frac{\partial c}{\partial y} f_y + 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 \right\}$$

$\longmapsto$ vedi il CODICE MATLAB (sul sito) e che alla fine viene Eq. PENDOLO

- Supponiamo di aver 2 sistemi di RIFERIMENTO $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ se ho un punto P che "vive per i cacchi suoi", se lo esprimo in coordinate di a è $P^a$




$P^a$ : coordinate di p in $\langle a \rangle$

- $v_{ab}$ velocità dell'ORIGINE di <b> rispetto ad <a> espressa nel sistema di riferimento <a>

- $\omega_{ab}$: descrizione della derivata della matrice di ROTAZIONE $R_{ab}$ da <b> ad <a>.

$$v_{ab} = \frac{d}{dt} O_b^a$$

$$\omega_{ab} \Rightarrow \quad \dot{R}_{ab} = S(\omega_{ab}) R_{ab}$$

$\dot{R}_{ab} \cdot R_{ab}$ e' ANTISIMMETRICA e può essere scritta come $S \cdot (\omega_{ab})$

$$R_{ab} \cdot R_{ab}^T = I \Longrightarrow \dot{R}_{ab} R_{ab} + R_{ab}^T \dot{R}_{ab} = 0$$

$$S(\omega_{ab}^{B}) = R_{ab}^T \cdot \dot{R}_{ab}$$

$B \longrightarrow$ BODY

CONSIDERIAMO IL PUNTO P e scriviamo la sua VELOCITA':

$$p^a = R_{ab} \cdot p^b + O_b^a$$

$$\dot{p}^a = \underbrace{\dot{R}_{ab} \cdot p^b}_{S(\omega_{ab}) R_{ab}} + R_{ab} \dot{p}^b + \underbrace{\frac{d}{dt}(O_b^a)}_{v_{ab}} = \underbrace{\omega_{ab} \times p^b + v_{ab}}_{(*)} + R_{ab} \dot{p}^b$$

$(\dot{p}^a)^b$ vogliamo trasformare $\dot{p}^a$ in espresso in b:

$$(\dot{p}^a)^b = R_{ba} \cdot \dot{p}^a = (R_{ab})^T \left( S(\omega_{ab}) R_{ab} p^b + R_{ab} \dot{p}^b + v_{ab} \right)$$

$$= R_{ab}^T \, S(\omega_{ab}) \, R_{ab} \, p^b + \dot{p}^b + (R_{ab})^T v_{ab}$$

$$R^T S(\omega) R = S(R^T \omega)$$

$$(\dot{p}^a)^b = S\big(\underbrace{R_{ab}^T \, \omega_{ab}}_{\omega_{ab}^B}\big) \, p^b + \dot{p}^b + \underbrace{(R_{ab})^T v_{ab}}_{v_{ab}^B} = \underbrace{\omega_{ab}^B \times p^b + v_{ab}^B + \dot{p}^b}_{(*)}$$

$$S(\omega_{ab}^B) = S(R_{ab}^T \omega_{ab}) =$$

$$= R_{ab}^T S(\omega_{ab}) R_{ab} = R_{ab}^T \dot{R}_{ab} \cancel{R_{ab}^T} \cancel{R_{ab}} = R_{ab}^T \dot{R}_{ab}$$

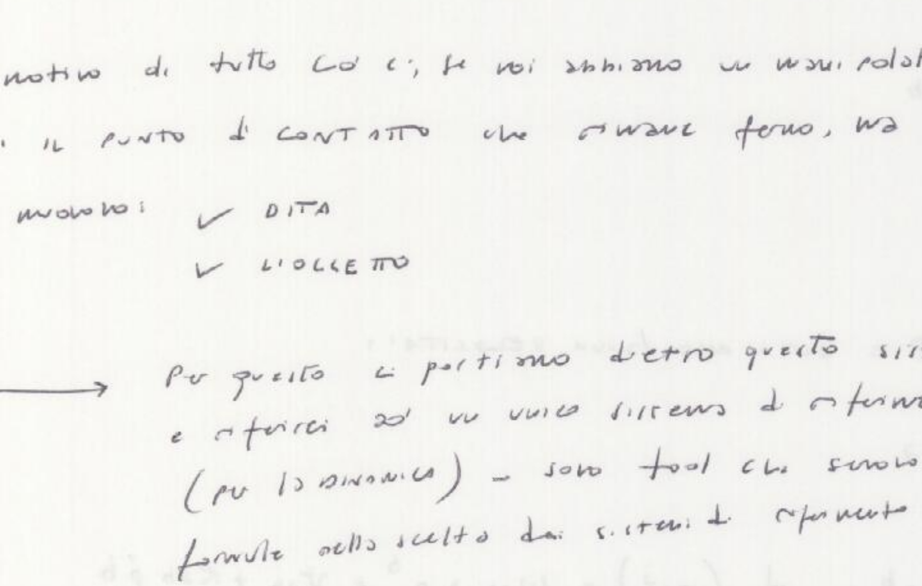
(*) e (*) sono nei 2 sistemi di riferimento

si noti che di tutto ciò, se noi abbiamo un manipolatore che tiene un oggetto con il punto di contatto che rimane fermo, ma ci sono delle cose che si muovono:

- ✓ DITA
- ✓ L'OGGETTO

⟶ Per questo ci portiamo dietro questi sistemi di riferimento e riferirci ad un unico sistema di riferimento inerziale (per la dinamica) - sono tool che servono a semplificare le formule dalla scelta dei sistemi di riferimento

3 SISTEMI DI RIFERIMENTO:



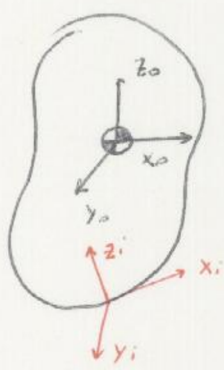
$$\begin{bmatrix} v_{ac}^B \\ \omega_{ac}^B \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} R_{bc}^T & -R_{bc}^T S(O_c^b) \\ 0 & R_{bc}^T \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} R_{cb} & S(O_c^b) R_{cb} \\ 0 & R_{cb} \end{bmatrix}}}_{Ad\,T_{cb}} \begin{bmatrix} v_{ab}^B \\ \omega_{ab}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{bc}^B \\ \omega_{bc}^B \end{bmatrix}$$

$$\left[ Ad\,T_{cb} \right]^{-1} = Ad\,T_{cb}^{-1} = Ad\,T_{bc}$$

$$\begin{bmatrix} v_{ab}^B \\ \omega_{ab}^B \end{bmatrix} = -Ad\,T_{ba} \begin{bmatrix} v_{ba}^B \\ \omega_{ba}^B \end{bmatrix}$$

$$Ad_{T_{ab} \cdot T_{bc}} = Ad_{T_{ab}} \cdot Ad_{T_{bc}}$$

- GRASP STATICS




→ SISTEMA DI RIFERIMENTO del CENTRO di MASSA del "[illegible]"

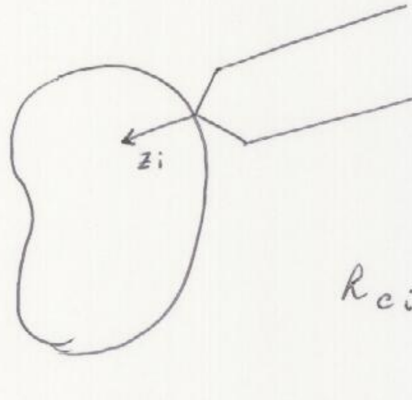
$$T_{oc_i}, \quad p^o = T_{oc_i}\, p^{c_i}$$

$$T_{oc_i} = \begin{bmatrix} R_{oc_i} & O_{c_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso caratterizziamo i punti di contatto. Il caso più semplice p.d.c.

i) SENZA ATTRITO, detto FRICTIONLESS:

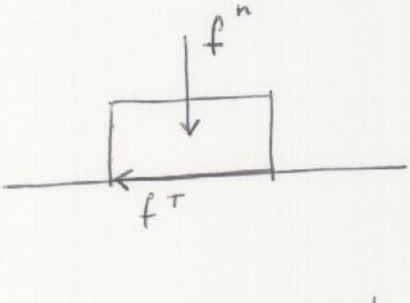
Nel caso di un p.d.c. senza attrito, caratterizziamo le $\bar{F}$ di interazione




$$R_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot f_{ci} \; ; \; f_{ci} \geq 0 \; , \; f_{ci} \in \mathbb{R}$$

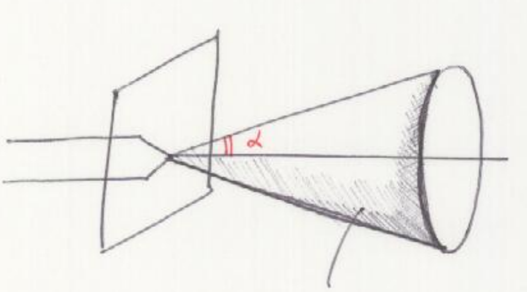
cioè ho la $\bar{F}$ solo lungo l'asse $z$ che è $\perp$ alla superficie

ii) Il secondo tipo di contatto è il punto di contatto con attrito,

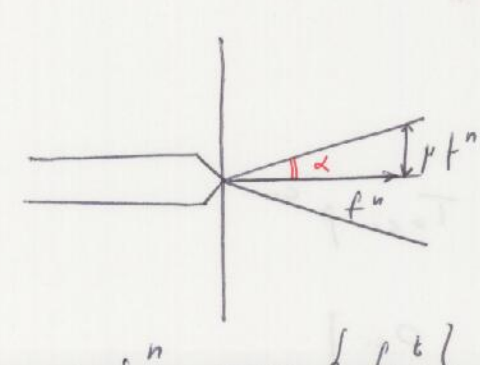



vincolo: $|f^T| \leq \mu f^n$

$\mu$ : coeff. di attrito (che dipende dai materiali)




Cono di attrito (all'interno del quale ci sono le $\bar{F}$ ammissibili)




$$\mu f^n = \max \{ f^t \}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\mu)$$

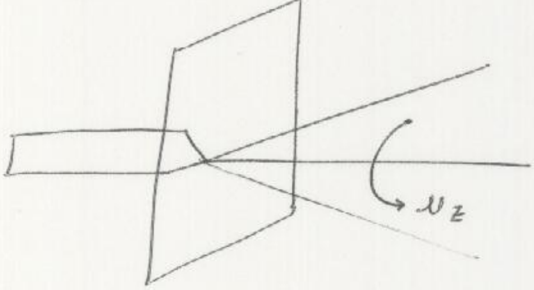
$$h_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci} \,, \quad f_{ci} \in FC_i$$

$$FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 \,,\ f_3 \geq 0 \right\}$$

$\longrightarrow$ tanto più schiaccio verso il basso e tanto più riesco a fare forze verso le altre due direzioni x e y

iii) SOFT FINGER

Così riesco a passare delle COPPIE lungo l'asse Z e la rappresentazione è simile




$$h_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{ci} \,, \quad f_{ci} \in FC_i$$

$$FC_i = \left\{ f_{ci} \in \mathbb{R}^4 ,\ \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 \,,\ f_3 \geq 0 ,\ |f_4| \leq \gamma f_3 \right\}$$

$\gamma$ : coeff. di ATTRITO TORSIONALE

$$f_{ci} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ f_{ci} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \mu_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \le \mu f_z ,\ f_z \ge 0 ,\ |\mu_z| \le \gamma f_z \right\}$$