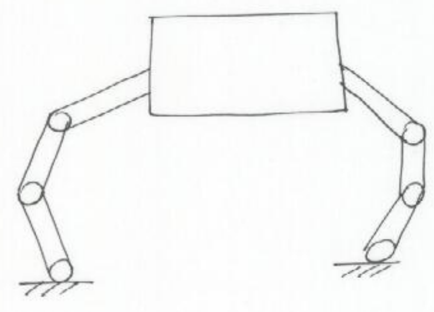
. DINAMICA di UN OGGETTO in UN CONTESTO di MANIPOLAZIONE fatto:

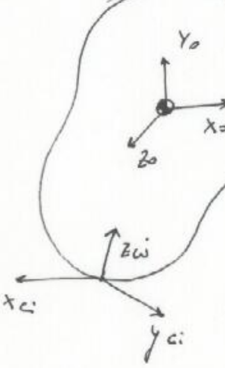


i) CARATTERIZZARE I VINCOLI CINEMATICI

ii) INSERIMENTO VINCOLO

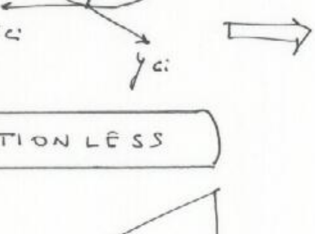
iii) CARATTERIZZARE I TIPI di CONTATTO, che SONO 3: A, B, C ↓

Avevamo anche associato dei SISTEMI di RIFERIMENTO:



$\Longrightarrow$ L'ASSE Z nel CONTATTO e' $\perp$ AL PUNTO di CONTATTO

A) $\boxed{\text{FRICTIONLESS}}$

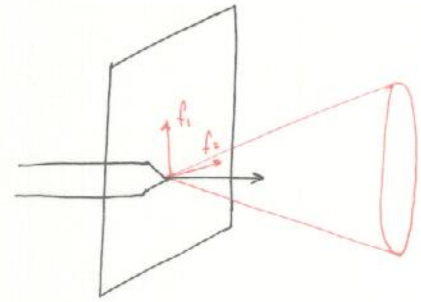


$$h_{ci} = \begin{bmatrix} f_{ci} \\ \mu_{ci} \end{bmatrix} = B_{ci} f_{ci}$$

$f_{ci} \in \cancel{F_{ci}}\ FC_i$ Friction cone

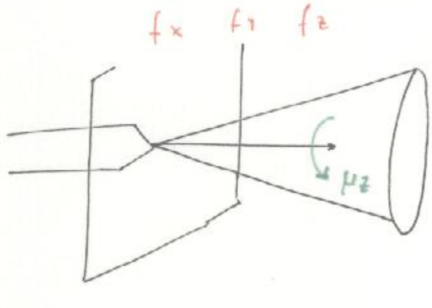
$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad FC_i = \left\{ f_1 \in \mathbb{R} : f_1 \geq 0 \right\}$$

B) WITH FRICTION



$$B_{ci} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ f_x & f_y & f_z \end{array} \end{array} \qquad FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 ,\ f_3 \geq 0 \right\}$$

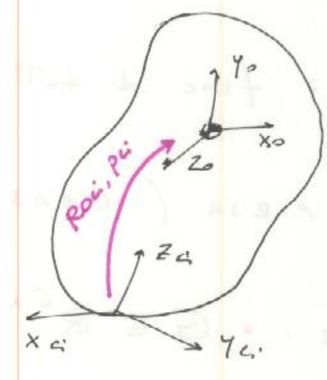
c) SOFT FINGER



$$B_{ci} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ f_x & f_y & f_z & \mu_z \end{array} \end{array} , \quad FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^4 , \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 , \ f_3 \geq 0 , \ |f_4| \leq \gamma f_3 \right\}$$

→ A questo punto tutte le forze h_{ci} sono rappresentate nel sistema di riferimento c_i; se vogliamo trasformarlo in s.r. O, la notazione sarà quella dello SCIAVICCO-SICILIANO, ovvero:

$$h_{ci}^{o} = \begin{bmatrix} R_{oci} & 0 \\ S(p_{oci})R_{oci} & R_{oci} \end{bmatrix} h_{ci}^{ci}$$



$$= \underbrace{\begin{bmatrix} R_{oci} & 0 \\ S(p_{oci})R_{oci} & R_{oci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{ci} \end{bmatrix}}_{G_{ci}} f_{ci}$$

$G_{ci} \in \mathbb{R}^{6 \times m_i}$ MATRICE di GRASPING

$$h^{o} = h_{c1}^{o} + h_{c2}^{o} + \dots + h_{ck}^{o} =$$

$$= G_{c1} f_{c1} + \dots + G_{ck} f_{ck} =$$

[NOTA: occhio a riscrivere questa in forma MATRICIALE!]

esempio:

$G_1 f_1 + G_2 f_1 + G_3 f_2 + G_4 f_2 = 0$

$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & \vdots & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{G_{c1}}^{m_1} & \dots & \overbrace{G_{ck}}^{m_k} \end{bmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{ck} \end{bmatrix}}_{f_c}$$

$G \in \mathbb{R}^{6 \times m}$, $m = m_1 + \dots + m_k$

$$\Longrightarrow \quad h^{o} = G \cdot f_c$$

$$f_c \in FC_1 \times \dots \times FC_k = FC$$

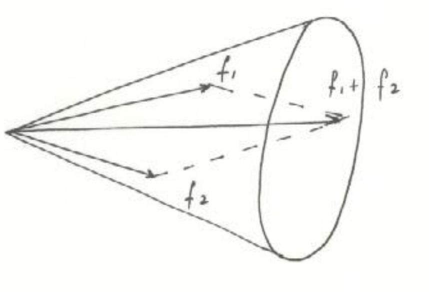
$\hookrightarrow$ Alla fine di tutta questa trattazione, è venuto fuori che:

✓ UNA PRESA (GRASP) CONSISTE DI UNA COPPIA (G, FC)

DOVE: • $G \in \mathbb{R}^{6 \times m}$

• $FC \in \mathbb{R}^m$, l'insieme dei suoi punti interni non è vuoto: $\text{int}(FC) \neq \emptyset$

FC soddisfa la seguente: se $f_1 \in FC$, $f_2 \in FC \Rightarrow$
$\alpha f_1 + \beta f_2 \in FC$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$



• ESEMPIO UTILE PER IL COMPITO (NOTA CHE SI SEMPLIFICANO I CONTI!):

$\hookrightarrow$ PUNTI DI CONTATTO SENZA ATTRITO

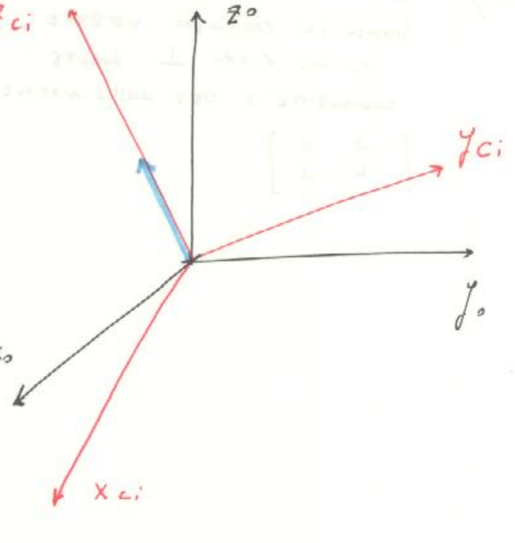
$$h^o_{c_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ S(p_{oc_i}) R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix}}_{G_{c_i}} B_{c_i} \cdot f_{c_i}$$

Se però senza attrito allora:

$$B_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_{c_i} \geq 0$$

$$G\cancel{R}_{c_i}^{o} = \begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ S(p_{oc_i})R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{R_{oc_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{n_{c_i}^{o}} \\ S(p_{oc_i})R_{oc_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{c_i}^{o} \\ p_{oc_i} \times n_{c_i}^{o} \end{bmatrix}$$

$n_{c_i}^{o}$ = NORMALE del CONTATTO c_i VISTO dal SISTEMA di rif O

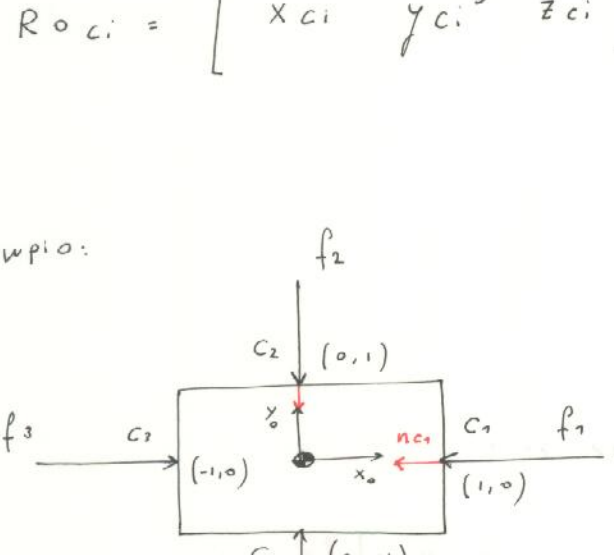


se prendo un vettore

$$R_{oc_i} = \begin{bmatrix} x_{ci}^{o} & y_{ci}^{o} & z_{ci} \end{bmatrix}$$

L'asse Zeta del sistema C_i visto da 'O'

. Esempio:



$\cdot\ C_i \longrightarrow$ PUNTO di CONTATTO

NOTA: per CONVENZIONE la NORMALE PUNTA SEMPRE VERSO IL CENTRO dell'OGGETTO!

$$G_{C_1} = \begin{bmatrix} n_{c_1}^{o} \\ p_{oc_1} \times n_{c_1}^{o} \end{bmatrix}, \quad n_{c_1}^{o} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{oc_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$GC_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ad - bc \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

2 VETTORI SU UN PIANO, hanno IL PRODOTTO VETTORE SU UN PIANO $\perp$ AVENTE COMPONENTE = DET della MATRICE $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$$GC_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ perché non c'è coppia

$$GC_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$GC_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Globalmente, la MATRICE di GRASP è:

$$G = \begin{bmatrix} GC_1 - GC_4 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ \\ \\ \\ \mu_z \end{array}$$

NEL CASO PLANARE:

possiamo eliminarle perché SISTEMA PLANARE

possiamo eliminarle perché coppie che fanno uscire dal piano

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• PROPRIETA' CHE POSSONO AVERE QUESTI PUNTI DI CONTATTO:

⟶ focalizziamo sulla STABILITA' della PRESA e in particolare sul FORCE CLOSURE:

✓ una PROPRIETA' FONDAMENTALE di UNA PRESA (GRASP) STABILE e' la CAPACITA' di bilanciare le forze/coppie esterne applicate all'oggetto, generando opportune forze/coppie ai punti di contatto.

Def: Una presa e' in CHIUSURA di FORZA (FORCE CLOSURE GRASP) se per ogni forza/coppia $h_e \in \mathbb{R}^6$ applicata all'oggetto esiste una forza di CONTATTO $f_c \in FC$, tale che:

$$G f_c = - h_e$$

Def Equivalente: il grasp (G, FC) e' in chiusura di forza se l'immagine di FC tramite G e' tutto $\mathbb{R}^6$:

$$G(FC) = \mathbb{R}^6 \qquad FC \xrightarrow{G} \mathbb{R}^6$$

G e f_c sono in uno spazio LINEARE ma f_c non vive in uno spazio LINEARE, quindi chiedere questa cosa e' chiedere che G sia linearmente indipendente!

UNA PROPRIETA' IMPORTANTE e' la POSSIBILITA' di GENERARE delle FORZE INTERNE, cioe' delle F che non creano delle coppie ma aumentano le F ammissibili.

Fatto: se (G, FC) e' force closure $\Longrightarrow$ FC contiene forze interne in senso stretto

Def: se $f_N \in \ker(G) \cap FC \implies f_N$ è una FORZA INTERNA

se $f_N \in \ker(G) \cap \text{int}(FC) \implies f_N$ è una FORZA INTERNA IN SENSO STRETTO

- CONSIDERAZIONI sulla MATRICE: $G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \end{bmatrix}$

(G, FC) . $FC = \{ f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0, f_4 \geq 0 \}$

✓ dato che le colonne di G non generano tutto $\mathbb{R}^3$
$\implies (G, FC) \longrightarrow$ NON E' FORCE CLOSURE

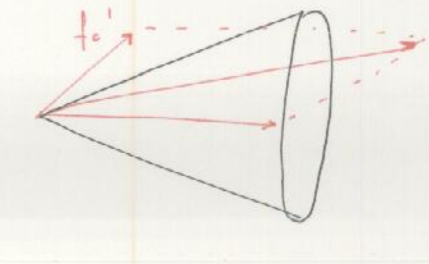
✓ Contiene F INTERNE?
se prendo: $f_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ se la moltiplichiamo per $G \longrightarrow$ è una FORZA INTERNA

$\hookrightarrow$ se AVETE F INTERNE non è DETTO che avete LA CHIUSURA di FORZA, MENTRE IL VICEVERSA è VERO!

- Fatto: se Esiste una FORZA INTERNA in SENSO STRETTO e $G(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^6$, i.e. G è SURIETTIVA $\implies$ (G, FC) è FORCE CLOSURE

- Dimostrazione: scegliamo arbitrariamente una forza h_e da contrastare, vogliamo costruire una certa f_c t.c.

$$G f_c = - h_e = h_o \quad , \quad f_c \in FC$$



→ per suriettività, esiste un f_c' t.c. $G f_c' = h_o$,

so che ci sono delle $\bar{F}$ interne, posso prendere un vettore lungo a piacimento che non dà contributo netto.

preso f_N forza INTERNA

$$G\left(f_c' + \alpha f_N\right) = h_o \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{f_c' + \alpha f_N}{\alpha} = f_N \in \mathrm{int}(FC) \longrightarrow$$

cioè a patto di prendere α grande finisce dentro al cono

Quindi esiste un α' sufficientemente grande t.c.

$$\frac{f_c' + \alpha' f_N}{\alpha'} \in \mathrm{int}(FC)$$

$$f_c = f_c' + \alpha' f_N \in \mathrm{int}(FC)$$

- Prossime lezioni:
  - ✓ caratterizzazione $\bar{F}$ closure
  - ✓ cono wrench. contatti per modificare $\bar{F}$ closure
  - ✓ scrittura dinamica di un manipolatore che contatta