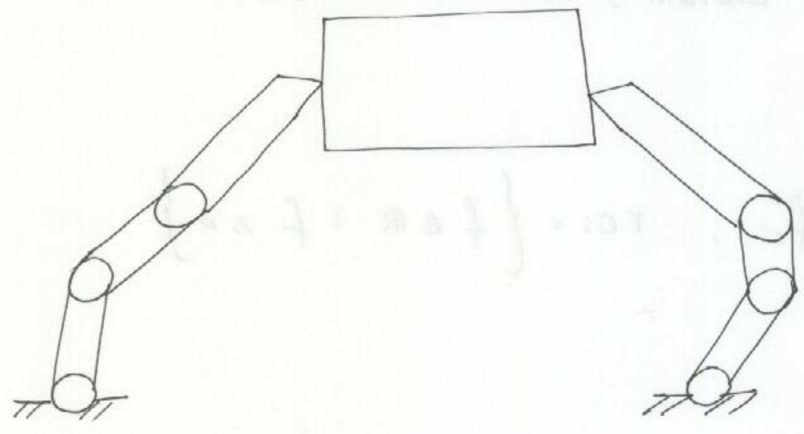
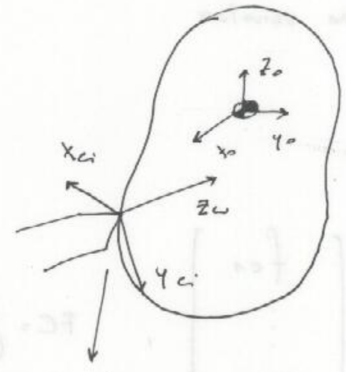
20th May 2011
NORI

• Riassunto: vogliamo modellare un contesto di manipolazione fatto come in fig.:



Se abbiamo un oggetto su cui agiscono un certo numero di contatti, abbiamo associato 2 sistemi di riferimento



$$h_{ci}^{o} = \begin{bmatrix} f_{ci}^{o} \\ \mu_{ci}^{o} \end{bmatrix} = G_{ci} \cdot f_{ci}, \quad f_{ci} \in FC_i$$

- CONDIZIONI ALTERNATIVE di "FORCE CLOSURE":

⟶ ci limitiamo a CONTATTI SENZA ATTRITO.

In questo tipo di contatti, abbiamo visto che:

$$\underbrace{h^{\circ}_{ci} = \begin{bmatrix} n^{\circ}_{ci} \\ p^{\circ}_{ci} \times n^{\circ}_{ci} \end{bmatrix}}_{} \cdot f_{ci} \;, \quad FC_i = \{ f \in \mathbb{R} : f \geq 0 \}$$

questo tipo di attrito
riassunto il concetto
che:

- $\bar{F}$ diretta lungo l'asse Z diretta lungo la normale e posso ottenere
- $\bar{F}$ diretta lungo una direzione che farebbe scivolare

$$h^{\circ} = \underbrace{\begin{bmatrix} n^{\circ}_{c1} & \cdots & n^{\circ}_{ck} \\ p^{\circ}_{c1} \times n^{\circ}_{c1} & \cdots & p^{\circ}_{ck} \times n^{\circ}_{ck} \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} f_{c1} \\ \vdots \\ f_{ck} \end{bmatrix} , \quad FC = \{ f \in \mathbb{R}^k, \; f_1 \geq 0, \; f_k \geq 0 \}$$

(1) (G, FC) è FORCE CLOSURE $\Longleftrightarrow G(FC) = \mathbb{R}^6$

$\Updownarrow$

(2) Le COLONNE di G "COPRONO POSITIVAMENTE" $\mathbb{R}^6$

⟶ (1) e (2) SONO EQUIVALENTI per TUTTI I PUNTI di CONTATTO SENZA ATTRITO

- Def: UN INSIEME DI VETTORI $\{ v_1 \dots v_k \}$ COPRE POSITIVAMENTE $\mathbb{R}^n$ SE PER OGNI $x \in \mathbb{R}^n$, ESISTONO COMBINATORI $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$ t.c.

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

- Def: $\{ v_1 \dots v_k \}$ SONO POSITIVAMENTE DIPENDENTI SE ESISTONO COMBINATORI $\exists \lambda_1 > 0 \dots \lambda_k > 0$

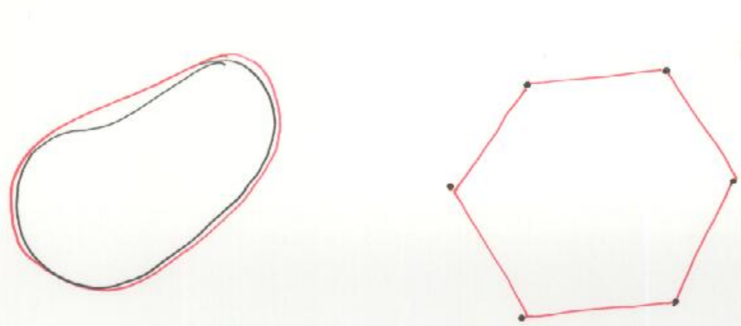
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

- Fatto: Se $\{ v_1, \dots, v_k \}$ coprono positivamente $\mathbb{R}^n \Longrightarrow$ POSITIVAMENTE DIPENDENTI

- Def: Un insieme K è CONVESSO se $\forall x, y \in K$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- Def: L'inviluppo CONVESSO (CONVEX HULL) di UN INSIEME S che indichiamo $co(S)$, è IL PIU' PICCOLO INSIEME CONVESSO K che CONTIENE S



- Theo: SI CONSIDERI UNA PRESA che CONTIENE SOLO PUNTI di CONTATTO SENZA ATTRITO (G, FC), con $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$.
  Indichiamo con $\{G_1 \dots G_m\}$ le colonne di G. Sono equivalenti:

  (1) (G, FC) e' FORCE CLOSURE

  (2) LE COLONNE di G COPRONO POSITIVAMENTE $\mathbb{R}^p$

  (3) LA CONVEX HULL DI $\{G_1 \dots G_m\}$ contiene un intorno dell'ORIGINE

  (4) NON ESISTE $v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$ t.c.

$$v^T G_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

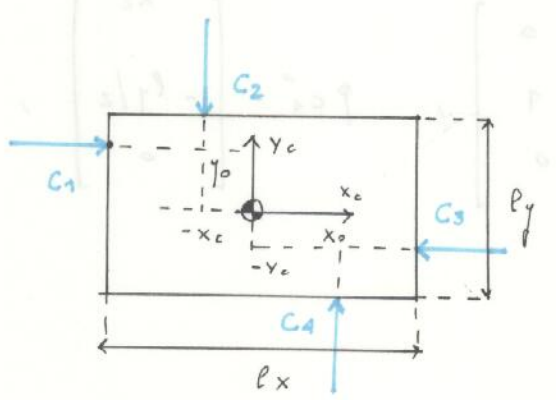
- Si puo' dimostrare che (4) puo' essere verificata in modo operativo in quanto equivalente alla seguente procedura:

  a- si scelgono $p-1$ colonne linearmente indipendenti di G e si indichi con v il vettore ortogonale alle $p-1$ colonne

  b- Si verifichi se i prodotti interni di v con le restanti colonne hanno tutte lo stesso segno

  (4) e' equivalente a testare a- e b- per tutte le scelte delle $p-1$ colonne indipendenti

- Esempio:



$$G = \begin{bmatrix} n_{c_1}^{o} & n_{c_4}^{o} \\ p_{c_1}^{o} \times n_{c_1}^{o} & p_{c_4}^{o} \times n_{c_4}^{o} \end{bmatrix}$$

$$n_{c_1}^{o} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{c_1}^{o} = \begin{bmatrix} -l_x/2 \\ y_c \\ \cancel{0} \end{bmatrix}, \quad p_{c_1}^{o} \times n_{c_1}^{o} = \begin{bmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{0} \\ -y_c \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -y_c \end{bmatrix}, \quad n_{c_2}^{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{c_2}^{o} = \begin{bmatrix} -x_c \\ l_y/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$p_{c_2}^{o} \times n_{c_2}^{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ x_c \end{bmatrix}, \quad n_{c_3}^{o} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{c_3}^{o} = \begin{bmatrix} l_x/2 \\ -y_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{c_3}^{0} \times n_{c_3}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_c \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -y_c \end{bmatrix} , \quad n_{c_4}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad p_{c_4}^{0} = \begin{bmatrix} x_c \\ -\ell_y/2 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$p_{c_4}^{0} \times n_{c_4}^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +x_c \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -y_c & x_c & -y_c & x_c \end{bmatrix}$$

per semplificare: $a = y_c \longrightarrow > 0$
$b = x_c \longrightarrow > 0$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -a & b & -a & b \end{bmatrix}$$

a - scelgo 2 colonne indipendenti di G ---

Colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -a & b \end{bmatrix} \quad e \quad v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$$

per verificare:

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

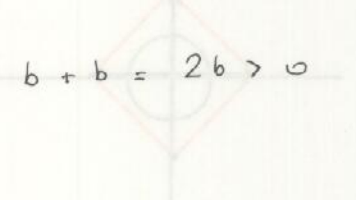
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix}}_{v^T} \cdot G_3 = \begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -a \end{bmatrix} = -a - a = -2a < 0$$

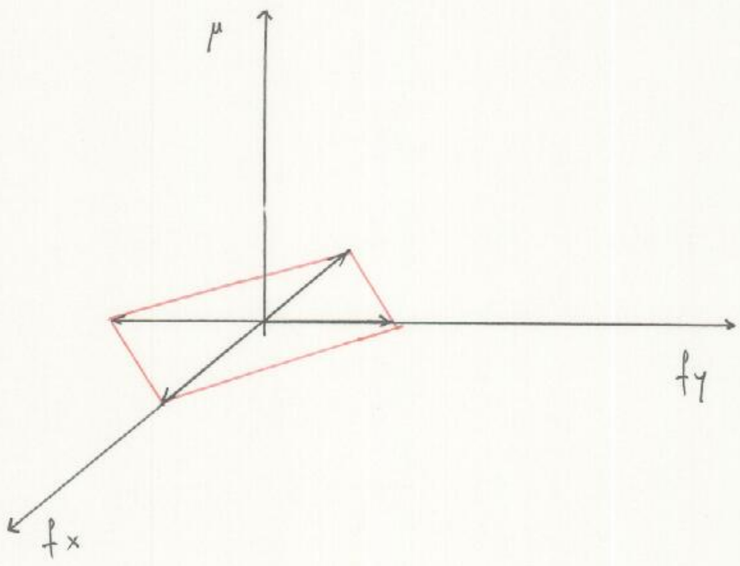
$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix} G_4 = \begin{bmatrix} a & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix} = b + b = 2b > 0$$

b - colonne: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -a & -a \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

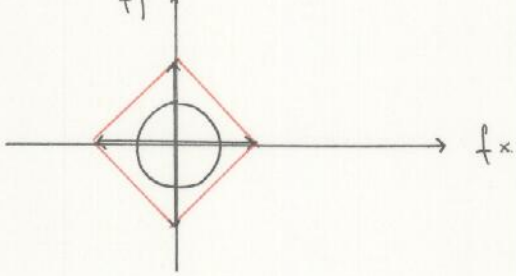
- Nel caso $\boxed{a = b = \phi}$ $\Longrightarrow$ NON VALE LA CHIUSURA ⊥ FORZA:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ovvero



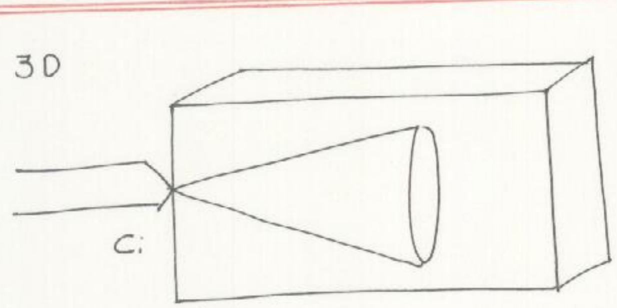


↳ Anche la (3) è FALSIFICATA

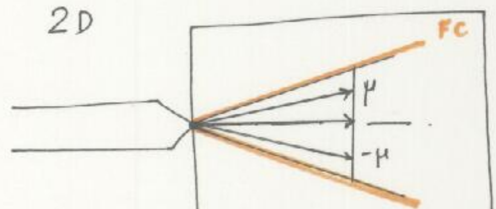


• Estensione al caso CONTATTI CON ATTRITO:

3D



2D



$$h_{c_i} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{G_{c_i}} f_{c_i}$$

$$f_{c_i} = FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3 ,\ f_3 \geq 0 \right\}$$

• Nel PIANO:

$$h_{c_i}^{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f_{c_i}, \quad f_{c_i} \in FC_i = \left\{ f \in \mathbb{R}^2,\ f_1 \geq 0,\ f_2 \geq 0 \right\}$$

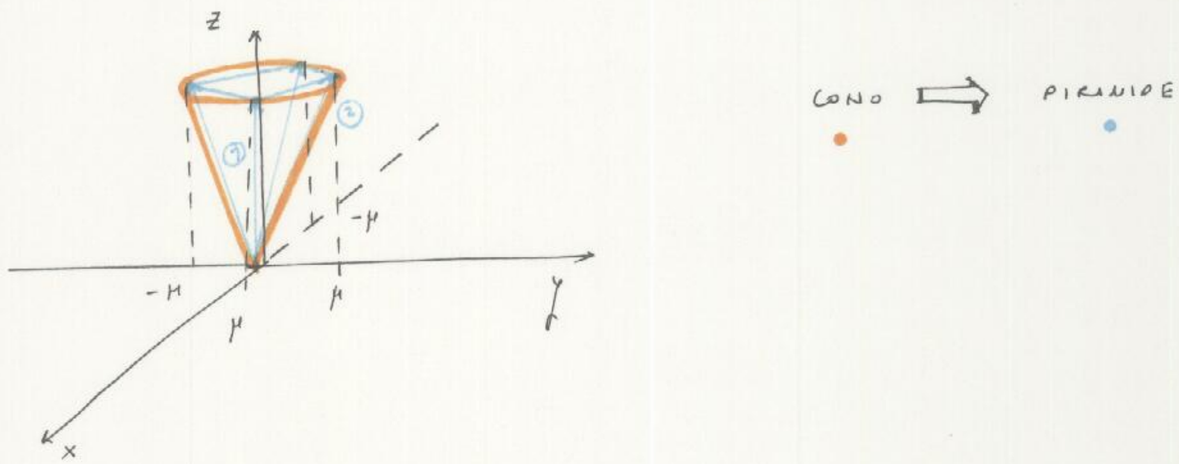
$$h_{c_i}^{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f_{c_i}$$

$$h_{c_i}^{o} = \begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ S(p_{oc_i}) R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix} h_{c_i}^{c_i}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ S(p_{oc_i}) R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G_{c_i}} f_{c_i}, \quad f_{c_i} \in FC_i$$

. Per quel che riguarda l'approssimazione 3D, si rappresenta il

CONO DI ATTRITO



$$h_{c_i}^{c_i} = \begin{bmatrix} \mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{ci}$$

1 2

. QUANTI PUNTI SONO NECESSARI per UNA CHIUSURA DI FORZA:

. Theo: Se L'INSIEME $X = \{v_1 \dots v_k\}$ copre positivamente $\mathbb{R}^p$

allora $k \geq p+1$

Dim: se per assurdo assumo che bastino p vettori per percorrere $\mathbb{R}^p$ allora significa che $\{v_1 \dots v_p\}$ coprono positivamente $\mathbb{R}^p$

allora: $\{v_1 \dots v_p\}$ e' una base. Dato $v \in \mathbb{R}^p$ $\exists!$ $\lambda_1 \dots \lambda_p$

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$

o v ha almeno uno dei coeff non positivi o $-v$.

- Theo: ~~se l'insieme~~ ESISTE SEMPRE UN $X = \{ v_1 \dots v_n \}$ COPRE POSITIVAMENTE $\mathbb{R}^p$

con $k \leq 2p$

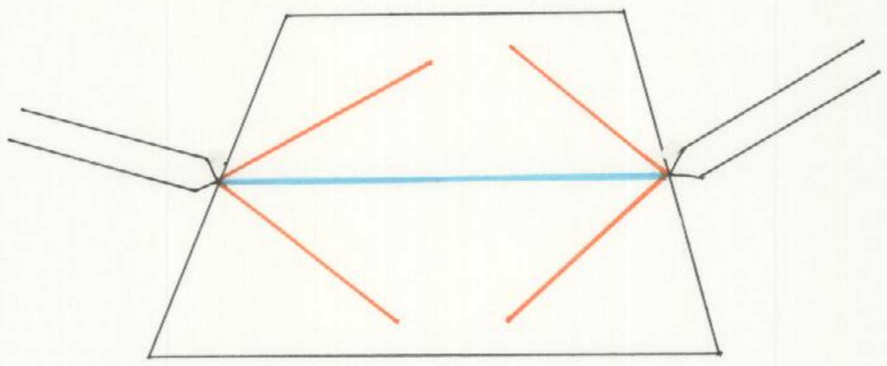
UN PUNTO di contatto con attrito nel caso planare

$p = 3$, 2 punti 1 con attrito c'e' speranza che

$\downarrow$

N° minimo di colonne in $G = 4$, dato che ciascuno punto con attrito da 2 colonne, c'e' speranza di chiudere l'oggetto, infatti vale il TEOREMA seguente:

- Theo: Una presa PLANARE con 2 PUNTI di CONTATTO CON ATTRITO e' IN FORCE CLOSURE se e SOLO SE LA LINEA CONGIUNGENTE I DUE PUNTI di CONTATTO GIACE INTERNAMENTE NEI CONI DI ATTRITO (ALL' INTERNO di ENTRAMBI I CONI DI ATTRITO).



Generalizzazione al caso 3D:

- TEOREMA: UNA PRESA TRIDIMENSIONALE CON 2 PUNTI DI CONTATTO DI TIPO SOFT FINGER E' FORCE CLOSURE SE E SOLO SE LA LINEA CONGIUNGENTE I DUE PUNTI DI CONTATTO GIACE INTERAMENTE ALL'INTERNO DEI DUE CONI DI ATTRITO.